

Kontrolinis darbas su sprendimais

Riba, tolydumas ir išvestinė pagal apibrėžimą

1. Apskaičiuokite $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 1)$.

Sprendimas

Funkcija taške $x = 2$ apibrėžta, todėl reikšmę tiesiog įstatome:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 1) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5.$$

Atsakymas: 5

2. Apskaičiuokite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$.

Sprendimas

Įstatę $x = 2$ gauname $\frac{0}{0}$. Skaitikliui ieškome dviejų skaičių, kurių sandauga -6 , o suma 1 : tai 3 ir -2 , todėl $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$. Vardiklis yra kvadratų skirtumas: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{x + 2} = \frac{2 + 3}{2 + 2} = \frac{5}{4}.$$

Atsakymas: $\frac{5}{4}$

3. Apskaičiuokite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2}$.

Sprendimas

Įstatę $x = 3$ gauname $\frac{0}{0}$. Skaidome: $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$, $9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$. Dauginamieji $x - 3$ ir $3 - x$ skiriasi tik ženklu: $x - 3 = -(3 - x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(3 - x)(x + 1)}{(3 - x)(3 + x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x + 1)}{x + 3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Dažna klaida: suprastinti $x - 3$ su $3 - x$ į vienetą ir pamesti minusą.

Atsakymas: $-\frac{2}{3}$

4. Apskaičiuokite $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+9} - 4}{x - 7}$.

Sprendimas

Įstatę $x = 7$ gauname $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš $\sqrt{x+9} + 4$. Skaitiklyje susidaro kvadratų skirtumas $(\sqrt{x+9})^2 - 4^2 = x + 9 - 16 = x - 7$. Vardiklio neatsklaidiname.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+9} - 4}{x - 7} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{x+9} - 4)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x - 7)(\sqrt{x+9} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{(x - 7)(\sqrt{x+9} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{x+9} + 4} = \frac{1}{\sqrt{16} + 4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Atsakymas: $\frac{1}{8}$

5. Apskaičiuokite $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

Sprendimas

Istatę $x = 9$ gauname $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš $\sqrt{x}+3$. Vardiklyje gauname $(\sqrt{x})^2 - 3^2 = x - 9$.

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x}+3) = 3+3 = 6.$$

Atsakymas: 6

6. Apskaičiuokite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x}$.

Sprendimas

Trupmeną padaliname į dvi dalis. Kai x neribotai didėja, $\frac{3}{x}$ artėja prie nulio (kaip $\frac{1}{x}$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x} \right) = 2 + 0 = 2.$$

Atsakymas: 2

7. Ar funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 1, \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases}$ yra tolydi taške $x = 1$?

Sprendimas

Funkcija tolydi taške, kai riba iš kairės, riba iš dešinės ir reikšmė tame taške sutampa.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 1 + 2 = 3, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x = 3, \quad f(1) = 3 \cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

Visos trys reikšmės lygios 3, todėl funkcija taške $x = 1$ tolydi.

Atsakymas: taip, tolydi

8. Raskite a , su kuria funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leq 1, \\ 2x + 3a, & x > 1 \end{cases}$ yra tolydi.

Sprendimas

Kiekviena dalis pati savaime tolydi, todėl vienintelis pavojingas taškas yra $x = 1$, kur dalys susijungia. Ten abiejų dalių reikšmės turi sutapti.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax) = 1 + a, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 3a) = 2 + 3a.$$

$$1 + a = 2 + 3a \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Atsakymas: $a = -\frac{1}{2}$

9. Raskite a , su kuria funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1 \end{cases}$ yra tolydi taške $x = 1$.

Sprendimas

Funkcija tolydi taške $x = 1$, kai $f(1)$ lygi ribai, kai $x \rightarrow 1$. Randame ribą:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Todėl $f(1) = a$ turi būti lygi 2.

Atsakymas: $a = 2$

10. Pagal apibrėžimą raskite funkcijos $f(x) = 7 - 2x$ išvestinę.

Sprendimas

Apibrėžimas: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Pirma: randame funkcijos pokytį. Nariai 7 ir $-2x$ susiprastina.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 7 - 2(x + \Delta x) - (7 - 2x) = 7 - 2x - 2\Delta x - 7 + 2x = -2\Delta x.$$

Antra: daliname iš Δx . *Trečia:* $\Delta x \rightarrow 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2) = -2.$$

Atsakyme nėra x : tiesė visur mažėja tuo pačiu greičiu.

Atsakymas: $f'(x) = -2$

11. Pagal apibrėžimą raskite funkcijos $f(x) = 3x^2$ išvestinę.

Sprendimas

Apibrėžimas: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Pirma: randame funkcijos pokytį.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 3x^2 = 6x\Delta x + 3\Delta x^2.$$

Antra: daliname iš Δx (iškeliamo Δx prieš skliaustus ir suprastiname). *Trečia:* $\Delta x \rightarrow 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x) = 6x.$$

Dažna klaida: įstatyti $\Delta x = 0$ prieš padalijant. Tada vėl gaunama $\frac{0}{0}$.

Atsakymas: $f'(x) = 6x$

12. Pagal apibrėžimą raskite funkcijos $f(x) = x^2 - 4x + 7$ išvestinę.

Sprendimas

Pirma: vietoje x įrašome $x + \Delta x$ ir atskliaudžiame.

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 7 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 4x - 4\Delta x + 7.$$

Antra: atimame $f(x) = x^2 - 4x + 7$. Nariai x^2 , $-4x$ ir 7 susiprastina.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + \Delta x^2 - 4\Delta x.$$

Trečia: daliname iš Δx ir žingsnį mažiname iki nulio.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x - 4) = 2x - 4.$$

Atsakymas: $f'(x) = 2x - 4$